

Горячие формулы школьного курса математики

Для успешного освоения высшей математики необходимо вспомнить следующее:

I) Модуль (абсолютное значение) числа

Грубо говоря, это число без учёта знака. Модуль «уничтожает» возможный знак «минуса»: $|4| = 4$, $|-4| = 4$, $|0| = 0$, $|\frac{10}{3}| = \frac{10}{3}$, $|-2,5| = 2,5$ и т.д.

Таким образом, модуль произвольного числа x всегда неотрицателен: $|x| \geq 0$.

Согласно школьному определению, модуль числа – это **расстояние** (а оно не может быть отрицательным) от соответствующей точки числовой прямой до начала координат. Из чего следует, что модули противоположных чисел равны, например: $|-4| = |4| = 4$. Действительно, числа -4 и 4 равноудалены от нуля.

Уравнение $|x| = \alpha$ имеет два корня: $x_1 = -\alpha$, $x_2 = \alpha$ (если $\alpha = 0$, то корень один).

Неравенство $|x| < \alpha$ раскрывается через двойное неравенство $-\alpha < x < \alpha$.

Неравенство $|x| > \alpha$ раскрывается через *совокупность* неравенств $\begin{cases} x < -\alpha \\ x > \alpha \end{cases}$, то есть

«икс» **либо** меньше $-\alpha$, **либо** больше α .

Аналогичные выкладки справедливы и для нестрогих неравенств $|x| \leq \alpha$, $|x| \geq \alpha$.

II) Формулы сокращенного умножения

1) Разность квадратов

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

2) Квадрат суммы и квадрат разности

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3) Сумма и разность кубов:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

4) Куб суммы и разности

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Данные формулы очень часто используются в ходе решения пределов, преобразований подынтегральных выражений, действий с комплексными числами.

Формулы №№1-2 желательно знать наизусть и сразу ВИДЕТЬ возможность их применения.

III) Решение квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

Без него далеко не уедешь. Вспоминаем, как решать.

Находим дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac$$

1) Если $D > 0$, то уравнение имеет два действительных корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{– обычно их располагают в порядке возрастания.}$$

2) Если $D = 0$, то уравнение имеет два совпавших действительных корня:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

3) Если $D < 0$, то уравнение имеет два сопряженных комплексных корня.

Подробная информация в статье «Комплексные числа для чайников»:

http://mathprofi.ru/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov.html

Практическим критерием правильности вычислений является тот факт, что у вас получился «хороший» дискриминант с извлечением корня нацело, например:

$D = 16$ и $\sqrt{D} = \sqrt{16} = 4$, а вот $D = 17$ – не есть здорово – скорее всего, вы допустили ошибку, либо в условии задачи опечатка. Хотя может так оно и должно быть.

Справедливо следующее разложение квадратного трехчлена на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Решение квадратного уравнения – одно из самых распространённых действий в ходе выполнения различных задач высшей математики.

IV) Упрощение многоэтажных дробей

1) Дробь $\frac{a}{b}$ делится на число c . $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$	2) Число a делится на дробь $\frac{b}{c}$. $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a \cdot c}{b}$
3) Дробь $\frac{a}{b}$ делится на дробь $\frac{c}{d}$. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	Все три правила применимы и справа налево, то есть из двухэтажной дроби можно искусственно сделать трёх- или четырёхэтажную дробь

V) Действия со степенями

В качестве основания степени снова возьмем всеми любимую букву x .

Надеюсь, что вы помните:

$$\frac{1}{x^a} = x^{-a}$$

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}, \text{ в частности: } \frac{x^a}{x^b} = x^a \cdot x^{-b} = x^{a-b}$$

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

Разумеется, правила работают и в обратном порядке.

Очень важно знать: $\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$, собственно, это не действие и не правило, а просто две записи ОДНОГО И ТОГО ЖЕ. В таком виде (правая часть) часто записываются радикалы (корни) в процессе нахождения производных, интегралов и т.д.

Пример:

$$\frac{1}{\sqrt[7]{(x + \cos 3x)^4}} = \frac{1}{(x + \cos 3x)^{\frac{4}{7}}} = (x + \cos 3x)^{-\frac{4}{7}}$$

Все три выражения – это **одно и то же**, просто запись разная.

VI) Немного о логарифмах

Основное логарифмическое тождество:

$$b = a^{\log_a b}, \text{ в частности: } b = e^{\ln b}$$

Некоторые важные свойства:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln b^a = a \ln b$$

Пример:

$$\ln \sqrt[3]{\left(\frac{x-3}{2x+5}\right)^2} = \ln \left(\frac{x-3}{2x+5}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \ln \left(\frac{x-3}{2x+5}\right) = \frac{2}{3} (\ln(x-3) - \ln(2x+5))$$

Все четыре выражения – записи одного и того же.

Перечисленные преобразования используются при нахождении производных, решении дифференциальных уравнений, в других задачах.