Правила интегрирования и таблица неопределенных интегралов

Обычно при нахождении интегралов сначала используются правила интегрирования, а затем – таблица интегралов.

Правила интегрирования:

1) $\int kudx = k\int udx$, где $k = const \neq 0$
– постоянный множитель можно вынести за знак интеграла;

2) $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx$ – интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от каждой функции в отдельности;

3) $\int udv = uv - \int vdu$ – правило интегрирования по частям.

Таблица неопределенных интегралов:

$\int dx = x + C$, здесь и далее $C = const$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

Следует обратить внимание, что интеграл от степенной функции – это самая используемая вещь на практике. Многие (но не все!) корни, например $\sqrt[3]{x^5}$, $\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}$, $\frac{1}{x^5}$, нужно представить в виде $x^{\frac{a}{b}}$ для применения формулы $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (как представить – см. *Горячие формулы шк. курса математики*: http://mathprofi.ru/goryachie_formuly.pdf).

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$, в частности, $\int e^x dx = e^x + C$

Интегралы от тригонометрических функций:

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$$, в частности $\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C$

$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ «высокий логарифм»

***Примечание**: часто данную формулу можно встретить немного в другом виде, например:* $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$ *, но первый вариант, на мой взгляд, удобнее.*

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C$, или, то же самое:

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-A}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-A}\right| + C$ «длинный логарифм»

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

Интегралы от гиперболических функций:

$\int shxdx = chx + C \qquad \int chxdx = shx + C \qquad \int \frac{dx}{ch^2x} = thx + C \qquad \int \frac{dx}{sh^2x} = -cthx + C$

! Важно. Иногда встречаются очень большие таблицы интегралов (порядка 100 штук). Эти таблицы рекомендую использовать только для самопроверки или в самом крайнем случае, так как интегралы от «других функций» на самом деле являются следствием правил и приёмов интегрирования. И, соответственно, данное «решение» может сильно не понравиться рецензенту.

Типичный пример такого «табличного» интеграла: $\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$

В действительности, для того, чтобы найти интеграл от логарифма, необходимо применить правило интегрирования по частям и подробно расписать ход решения.

А вот некоторые неберующиеся неопределенные интегралы:

$\int e^{-x^2} dx$ – интеграл Пуассона;

$\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$ – интегралы Френеля;

$\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм;

$\int \frac{e^x dx}{x}$ – интегральная экспонента;

$\int \frac{\sin x dx}{x}$ – интегральный синус;

$\int \frac{\cos x dx}{x}$ – интегральный косинус.

Изредка проскакивают. Встретятся – не мучайтесь, в ответе достаточно указать, что интеграл не берется. А если подобные интегралы появятся *в ходе решения* какого-либо примера, значит, Вы либо ошиблись, либо интеграл является неберущимся, либо, что вероятнее всего, в условии допущена опечатка.