Замечательные пределы

Наиболее часто на практике можно встретить два замечательных предела: ***первый замечательный предел*** и ***второй замечательный предел***.

Первый замечательный предел:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

В качестве параметра α может выступать не только буква x, но и сложная функция, **важно только, чтобы она стремилась к нулю**.

Пример:

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^3 + 2x^2)}{x^3 + 2x^2} = 1$, здесь всё нормально, так как $x^3 + 2x^2 \to 0$

А вот в этом случае: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x+3)}{2x+3}$ первый замечательный предел использовать нельзя, так как $2x + 3 \to 3 \neq 0$

Следует отметить, что если поменять числитель и знаменатель местами, то от этого ничего не изменится: $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1$ – тот же самый первый замечательный предел.

Второй замечательный предел:

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = e$$

e – это иррациональное число: $e \approx 2{,}7....$

Нередко можно встретить модификацию второго замечательного предела:

$$\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

В практических задачах для общего случая (когда «икс» стремится к произвольному числу a) удобно использовать формулу, которая представляет собой следствие второго замечательного предела:

Неопределенность вида 1^{∞} можно устранить с помощью формулы:

$$\lim_{x \to a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a} [(u(x)-1) \cdot v(x)]}$$

***Намного реже* встречаются другие замечательные пределы:**

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\log_b(1+\alpha)}{\alpha}=\dfrac{1}{\ln b}$, $(b>0, b\neq 1)$, в частности: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1$

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{b^{\alpha}-1}{\alpha}=\ln b$, $(b>0, b\neq 1)$, в частности: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha}=1$

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{(1+\alpha)^k-1}{\alpha}=k$, где k – любое действительное число.

Опять же: в качестве параметра α может выступать не только буква x, но и сложная функция, **важно только, чтобы она стремилась к нулю**.

Внимание! Перестановка числителя и знаменателя в данных пределах в общем случае **не обходится без последствий**:

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha}{\log_b(1+\alpha)}=\ln b$, $(b>0, b\neq 1)$

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha}{b^{\alpha}-1}=\dfrac{1}{\ln b}$, $(b>0, b\neq 1)$

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha}{(1+\alpha)^k-1}=\dfrac{1}{k}$, где k – любое действительное число, отличное от нуля.

НО распространенные частные случаи перестановочны числителем и знаменателем без изменения значения предела (что логично):

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha}{\ln(1+\alpha)}=1$

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha}{e^{\alpha}-1}=1$

Замечательные эквивалентности

Если $\alpha \to 0$, то справедливы следующие замечательные эквивалентности:

1) $\sin\alpha \sim \alpha$

2) $tg\alpha \sim \alpha$

3) $\arcsin\alpha \sim \alpha$

4) $\mathrm{arctg}\alpha \sim \alpha$

5) $1-\cos\alpha \sim \frac{1}{2}\cdot\alpha^2$

6) $\log_b(1+\alpha) \sim \frac{\alpha}{\ln b}$ $(b>0, b\neq 1)$, в частности: $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$

7) $b^\alpha - 1 \sim \alpha\ln b$ $(b>0, b\neq 1)$, в частности: $e^\alpha - 1 \sim \alpha$

8) $(1+\alpha)^k - 1 \sim \alpha k$, как вариант: $(1+\alpha)^k \sim \alpha k + 1$

В качестве параметра α может выступать и сложная функция, **лишь бы она стремилась к нулю**.