

Правила интегрирования и таблица неопределенных интегралов

Обычно при нахождении интегралов сначала используются правила интегрирования, а затем – таблица интегралов.

Правила интегрирования:

1) $\int k u dx = k \int u dx$ – постоянный множитель можно вынести за знак интеграла;

2) $\int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx$ – интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от каждой функции в отдельности;

3) $\int u dv = uv - \int v du$ – правило интегрирования по частям.

4) Замена переменной. Во избежание путаницы, её расписывать не буду, читайте статью: http://mathprofi.ru/metod_zameny_peremennoi.html

Таблица неопределенных интегралов:

$\int dx = x + C$, здесь и далее $C = const$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ($n \neq -1$) Следует обратить внимание, что интеграл от степенной функции – это самая используемая вещь на практике. Многие (но не все!) корни, например $\sqrt[3]{x^5}$, $\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}$, $\frac{1}{x^5}$, нужно представить в виде $x^{\frac{a}{b}}$ для применения формулы $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (как представить – см. Горячие формулы шк. курса математики: http://mathprofi.ru/goryachie_formuly.pdf).
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, в частности, $\int e^x dx = e^x + C$
Интегралы от тригонометрических функций: $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$, в частности $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \text{ «высокий логарифм»}$$

Примечание: часто данную формулу можно встретить немного в другом виде, например: $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$, но первый вариант, на мой взгляд, удобнее.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| + C, \text{ или, то же самое:}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - A}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - A} \right| + C \text{ «длинный логарифм»}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

Интегралы от гиперболических функций:

$$\int shx dx = chx + C \quad \int chx dx = shx + C \quad \int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C \quad \int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$$

Важно! Иногда встречаются очень большие таблицы интегралов (порядка 100 штук). Эти таблицы рекомендую использовать только для самопроверки или в самом крайнем случае – по той причине, что интегралы от «других функций» на самом деле являются следствием правил и приёмов интегрирования. И, соответственно, данное «решение» может сильно не понравиться рецензенту. Типичный пример такого «табличного» интеграла: $\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$

В действительности, для того, чтобы найти интеграл от логарифма, следует применить правило интегрирования по частям и подробно расписать ход решения.

А вот некоторые **неберущиеся неопределенные интегралы:**

$\int e^{-x^2} dx$ – интеграл Пуассона;

$\int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx$ – интегралы Френеля;

$\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм;

$\int \frac{e^x dx}{x}$ – интегральная экспонента;

$\int \frac{\sin x dx}{x}$ – интегральный синус;

$\int \frac{\cos x dx}{x}$ – интегральный косинус.

Издавка проскакивают. Встретятся – не мучайтесь, в ответе достаточно указать, что интеграл не берется. А если подобные интегралы появятся *в ходе решения* какого-либо примера, значит, Вы либо ошиблись, либо интеграл является неберущимся, либо, что вероятнее всего, в условии допущена опечатка.